Математические заметки

том 58 выпуск 6 декабрь 1995

ПРИЗНАК КОМПАКТНОСТИ СЛОЕНИЯ

И. А. Мельникова

В статье изучаются слоения на гладких компактных многообразиях, определяемые замкнутой 1-формой с морсовскими особенностями. Задача об изучении топологической структуры поверхностей уровня таких форм была поставлена С. П. Новиковым в работе [1]. Этот вопрос изучался в работах [2]–[5]. В данной статье исследуется проблема компактности поверхностей уровня, вводится понятие степени компактности слоения и в этих терминах доказывается признак компактности.

В пункте 1 приводятся необходимые далее определения и вводится понятие степени компактности слоения. Основной результат работы – признак компактности слоения морсовской формы – доказывается в пункте 2. В пункте 3 рассматриваются некоторые следствия: связь степени компактности слоения и степени иррациональности формы, а также, более подробно, двумерный случай.

Настоящая работа является естественным продолжением [6].

1. Предварительные определения. Рассмотрим гладкое компактное n-мерное многообразие M и определенную на нем замкнутую 1-форму ω, обладающую невырожденными изолированными особенностями.

Определение 1 [7]. Точка $p \in M$ называется *регулярной особенностью* ω, если в некоторой окрестности $O(p)$ $\omega = df$, где f – функция Морса, имеющая особенность в p. Следовательно, существуют координаты $x^1, \dots, x^n$ такие, что в этой окрестности

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} x_i dx^i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i dx^i.$$

Число $\min(k, n-k)$ называется *индексом* особой точки.

Форма ω определяет на множестве $M - \operatorname{Sing} \omega$ слоение $\mathscr{F}_\omega$ коразмерности 1. Если индекс особой точки P равен нулю, то некоторая окрестность P слоится на сферы. Если $\operatorname{ind} P = 1$, то существует слой, который может быть сделан локально линейно связанным добавлением к нему особенности P. Он называется коническим слоем. Если $\operatorname{ind} P > 1$, тогда все слои в окрестности P локально линейно связаны.

Слоение $\mathscr{F}_\omega$ состоит из трех типов слоев [7]:

1) компактные слои, допускающие окрестность, состоящую из диффеоморфных слоев;
2) конические слои, т.е. слои, которые могут быть сделаны локально линейно связанными около особенности индекса 1 добавлением этой особенности к слою;
3) оставшиеся некомпактные слои.

В дальнейшем мы будем считать, что особая точка P принадлежит слою и канонические слои являются, таким образом, линейно связными.

Определение 2. Рассмотрим γ – компактный слой $\mathscr{F}_\omega$ и отображение $\gamma \to [\gamma] \in H_{n-1}(M)$. Тогда образ множества компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_{n-1}(M)$. Обозначим ее H_ω и назовем $\operatorname{rk} H_\omega$ *степенью компактности слоения* $\mathscr{F}_\omega$.

Поскольку $H_\omega \subseteq H_{n-1}(M)$, то $0 \leqslant \operatorname{rk} H_\omega \leqslant \beta_{n-1}$, где $\beta_{n-1} = \operatorname{rk} H_{n-1}(M)$. Если все слои $\mathscr{F}_\omega$ некомпактны, то $\operatorname{rk} H_\omega = 0$. Обратное неверно: могут существовать компактные слои, гомологичные нулю. Более того, существуют компактные слоения с $\operatorname{rk} H_\omega = 0$. Для этого достаточно рассмотреть многообразие с условием $H_{n-1}(M) = 0$. Очевидно, слоение всякой замкнутой формы компактно и все слои гомологичны нулю.

Рассмотрим группу $H_{n-1}(M)$ и операцию пересечения гомологических классов $H_{n-1}(M) \times H_{n-1}(M) \to H_{n-2}(M)$, определенную следующим образом [8].

Пусть $x, y \in H_{n-1}(M)$, D – оператор двойственности Пуанкаре, тогда $x \circ y = Dx \cap y$. Если гомологические классы x и y реализуются подмногообразиями X и Y, то $x \circ y$ представляет собой гомологический класс $X \cap Y$. Эта операция обладает свойством косой симметрии: $x \circ y = -y \circ x$.

Определение 3. Рассмотрим подгруппу $H \subset H_{n-1}(M)$ такую, что $\forall x, y \in H$ $x \circ y = 0$. Назовем H *изотропной подгруппой* относительно операции пересечения циклов. Изотропная подгруппа H называется *максимальной*, если $\forall x \in H$ и $\forall y \notin H$ $x \circ y \neq 0$.

Очевидно, подгруппа компактных слоев H_ω является изотропной подгруппой в $H_{n-1}(M)$.

Обозначим через M_ω множество, полученное выбрасыванием всех максимальных окрестностей, состоящих из диффеоморфных компактных слоев и всех слоев, которые могут быть компактифицированы добавлением особых точек.

2. Основная теорема. Докажем следующий признак.

Теорема. *Если подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, является максимальной изотропной подгруппой в $H_{n-1}(M)$, то $M_\omega = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть подгруппа H_ω имеет максимальный ранг, и $H_\omega = \langle[\gamma_1],\dots,[\gamma_N]\rangle$, где γ_i – слои $\mathscr{F}_\omega$. Разрезая M по слоям $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, получим M' – многообразие с краем.

Пусть $\varphi\colon M'\to M$ – отображение склейки, $i\colon\partial M'\to M'$ отображение вложения края.

Лемма 1. *Если H_ω – максимальная изотропная подгруппа, то отображение $i_*\colon H_{n-1}(\partial M')\to H_{n-1}(M')$ сюръективно.*

Доказательство. Отображение склейки $\varphi\colon M'\to M$ индуцирует отображение пар $\varphi\colon(M',\partial M')\to(M,\bigcup\gamma_i)$. Обозначим $\varphi|_{\partial M'}=\varphi_1$ и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(\partial M') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_{1*}"] & H_{n-1}(M') \arrow[d, "\varphi_*"] \\ H_{n-1}(\bigcup\gamma_i) \arrow[r, "j"] & H_{n-1}(M)\,. \end{tikzcd}$$

Покажем, что: 1) отображение j инъективно, 2) φ_{1*} сюръективно, 3) $\ker\varphi_*\subset\operatorname{im} i_*$.

1) Поскольку слои γ_i не пересекаются: $\gamma_i\cap\gamma_j=\varnothing$, то из последовательности Майера–Виеториса получим:

$$H_{n-1}(\bigcup\gamma_i)=\oplus H_{n-1}(\gamma_i).$$

По предположению циклы $[\gamma_i]$ независимы в M, следовательно,

$$\oplus H_{n-1}(\gamma_i)=\langle[\gamma_1],\dots,[\gamma_N]\rangle=H_\omega$$

и отображение $j\colon H_\omega\to H_{n-1}(M)$ является вложением.

2) Поскольку $\varphi(\partial M')=\bigcup\gamma_i$, то φ_{1*} сюръективно.

3) Если $\varphi_* z'=0$, то $\varphi(z')=\partial S$, где $S\subset M$. При разрезании S ограничивают z' и те γ_i, для которых $S\cap\gamma_i\ne\varnothing$. Таким образом, $z'\in\operatorname{im} i_*$.

Рассмотрим $z'\in H_{n-1}(M')$, тогда $z'\cap\partial M'=\varnothing$, следовательно, $\varphi(z')\cap\gamma_i=\varnothing$, $i=1,\dots,N$, и значит, $\varphi_* z'\circ\gamma_i=0$, $i=1,\dots,N$.

По условию H_ω максимальна, следовательно, $\varphi_* z' \in H_\omega$. Поскольку $j\colon H_\omega \to H_{n-1}(M)$ вложение, то существует $z \in j^{-1}(\varphi_* z')$. Отображение φ_{1*} сюръективно, значит, элемент z имеет прообраз в $H_{n-1}(\partial M')$: $z_0 = \varphi_*^{-1}(z)$. Тогда в силу коммутативности диаграммы:

$$\varphi_* i_* z_0 = j\varphi_{1*} z_0 = j(z) = \varphi_* z'.$$

Следовательно, $z' - i_* z_0 \in \ker \varphi_*$. В силу доказанного выше, $\ker \varphi_* \subset \operatorname{im} i_*$, значит, $z' - i_* z_0 \in \operatorname{im} i_*$ и $z' \in \operatorname{im} i_*$. Следовательно, отображение i_* сюръективно. Лемма доказана.

Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$0 \to Z \to H_{n-1}(\partial M') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M') \to 0,$$

где $Z = \ker i_*$, и применим к ней функтор $\otimes\mathbb{R}$, который является ковариантным и точным справа [8]. Получим точную последовательность:

$$Z \otimes \mathbb{R} \to H_{n-1}(\partial M') \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{i_R} H_{n-1}(M') \otimes \mathbb{R} \to 0,$$

где отображение i_R также сюръективно.

Согласно теореме об универсальных коэффициентах $H_k(M,\mathbb{R}) = H_k(M) \otimes \mathbb{R}$. Таким образом, из леммы 1 следует, что для гомологий с коэффициентами в $\mathbb{R}$ отображение

$$i_*\colon H_{n-1}(\partial M',\mathbb{R}) \to H_{n-1}(M',\mathbb{R})$$

тоже сюръективно.

Лемма 2. *Пусть $i\colon \partial M' \to M$ отображение вложения. Если отображение $i_*\colon H_{n-1}(\partial M',\mathbb{R}) \to H_{n-1}(M',\mathbb{R})$ сюрьективно, то отображение $j\colon H_1(\partial M',\mathbb{R}) \to H_1(M',\mathbb{R})$ также сюрьективно.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму (гомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{ccc}
H_1(M',\partial M') & \xrightarrow{\ \partial\ } & H_0(\partial M') \\
\big\downarrow D & & \big\downarrow D \\
H^{n-1}(M',\mathbb{R}) & \xrightarrow{\ i_*\ } & H^{n-1}(\partial M',\mathbb{R})\,.
\end{array} \tag{1}$$

Здесь D – оператор двойственности Пуанкаре для многообразия с краем. По условию, отображение $i_*\colon H_{n-1}(\partial M',\mathbb{R}) \to H_{n-1}(M',\mathbb{R})$ сюръективно.

Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$0 \to Z \to H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M', \mathbb{R}) \to 0,$$

где $Z = \ker i_*$. Поскольку $H^{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) = \operatorname{Hom}\bigl(H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}), \mathbb{R}\bigr)$ и, аналогично, $H^{n-1}(M', \mathbb{R}) = \operatorname{Hom}\bigl(H_{n-1}(M', \mathbb{R}), \mathbb{R}\bigr)$, то применим к этой последовательности функтор $\operatorname{Hom}(\ , \mathbb{R})$, который является контрвариантным и точным справа [8]. Получим точную последовательность:

$$\operatorname{Hom}(Z, \mathbb{R}) \leftarrow \operatorname{Hom}\bigl(H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}), \mathbb{R}\bigr) \xleftarrow{i_*} \operatorname{Hom}\bigl(H_{n-1}(M', \mathbb{R}), \mathbb{R}\bigr) \leftarrow 0,$$

из которой следует, что отображение i_* инъективно. Тогда в диаграмме (1) $\ker \partial = 0$.

Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары

$$\to H_1(\partial M') \xrightarrow{j} H_1(M') \xrightarrow{l} H_1(M', \partial M') \xrightarrow{\partial} H_0(\partial M') \to.$$

Так как $\ker \partial = \operatorname{im} l = 0$, то $\ker l = H_1(M')$. Поскольку $\operatorname{im} j = \ker l = H_1(M')$, то отображение j сюръективно. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon M' \to M$ и $\omega' = \varphi^*\omega$ – ограничение ω на M'. Для всякого $z' \in H_1(M')$ имеем:

$$\int_{z'} \omega' = \int_{z'} \varphi^*\omega = \int_{\varphi_* z'} \omega.$$

По лемме 2 $z' \in H_1(\partial M')$, следовательно, $\varphi(z') \in \bigcup \gamma_i$. Тогда $\int_{\varphi(z')} \omega = 0$. Итак, $\forall z' \in H_1(M')$ $\int_{z'} \omega' = 0$, и, поскольку ω – морсовская форма, на M' слоение компактно, а значит, компактно и слоение на M. Теорема доказана.

Замечание. В обратную сторону утверждение теоремы в размерности выше второй неверно. Так, на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ существует компактное слоение, все слои которого гомологичны нулю, т.е. подгруппа H_ω не является максимальной.

3. Некоторые следствия. Ранг максимальной изотропной подгруппы в $H_{n-1}(M)$ является характеристикой многообразия и не зависит от слоения. Обозначим его h_0. В двумерном случае ранг максимальной изотропной подгруппы равен числу ручек многообразия: $h_0(M_g^2) = g$. В работе [6] был доказан следующий критерий: *слоение $\mathscr{F}_\omega$ на M_g^2 компактно, если и только если* $\operatorname{rk} H_\omega = g$. Степень компактности слоения морсовской формы связана со степенью иррациональности формы ω. Скажем, на M_g^2 справедливо неравенство: $\operatorname{dirr} \omega + \operatorname{rk} H_\omega \leqslant 2g - 1$.

Следствие 1. *Пусть ω – замкнутая 1-форма с морсовскими особенностями, определяющая на компактном многообразии M^n слоение $\mathscr{F}_\omega$. Если H_ω – максимальная изотропная подгруппа, то* $\operatorname{dirr}\omega < \operatorname{rk} H_\omega$.

Доказательство. Действительно, если H_ω – максимальная изотропная подгруппа, $\operatorname{rk} H_\omega = h_0(M)$, то, как следует из доказательства теоремы, 1-форма ω может иметь нетривиальные интегралы только по тем циклам, которые трансверсальны слоям γ_k. Следовательно, $\operatorname{dirr}\omega \leqslant \operatorname{rk} H_\omega - 1 = h_0(M) - 1$. Следствие доказано.

Следствие 2. *На M_g^2 слоение морсовской формы ω имеет некомпактный слой, если* $\operatorname{dirr}\omega \geqslant g$.

Действительно, в силу критерия компактности слоения на M_g^2, если $\mathscr{F}_\omega$ компактно, то H_ω максимальна. Тогда из предыдущего утверждения вытекает, что $\operatorname{dirr}\omega \leqslant h_0(M_g^2) - 1$. Следствие доказано.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
31.05.93
Переработанный вариант
30.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 3–49.
[2] Новиков С.П. Критические точки и поверхности уровня многозначных функций // Тр. МИАН. 1984. Т. 166. С. 201–209.
[3] Зорич А.В. Квазипериодическая структура поверхностей уровня морсовской 1-формы, близкой к рациональной, – задача С.П. Новикова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №6. С. 1322–1344.
[4] Ле Т.К.Т. Структура поверхностей уровня морсовской формы // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №1. С. 124–133.
[5] Алания Л.А. О топологической структуре поверхностей уровня морсовских 1-форм // УМН. 1991. Т. 46. №3. С. 179–180.
[6] Мельникова И.А. Признак некомпактности слоения на M_g^2 // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №3. С. 158–160.
[7] Henc Damir. Ergodicity of foliations with singularities // J. Func. Anal. 1987. V. 75. №2.
[8] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.